

ش صندلی (ش داوطلب):

نام دبیر: آقای غلامحسینی

نوبت امتحانی: اول

ساعت امتحان:

درس: حسابان

پایه: یازدهم ریاضی

سال تحصیلی: ۱۴۰۱ - ۱۴۰۰

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

کلاس:

تعداد صفحات: ۴ صفحه

تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۱۸

۱. مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۶ را بیابید. (۱ نمره)

$$99 < 6n < 1000 \Rightarrow \frac{99}{6} < n < \frac{1000}{6} \Rightarrow 16.5 < n < 166.6$$

$$n = 17, 18, \dots, 166$$

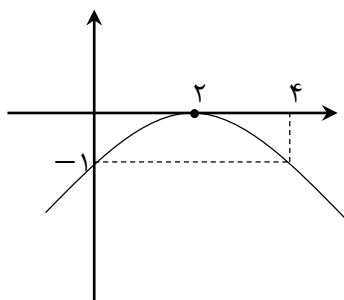
$$\Rightarrow 6n = \{102, 108, \dots, 996\} \quad n = \frac{996 - 102}{6} + 1 = 150 \quad (0.125) \quad (0.125)$$

$$S_{150} = \frac{150}{2} (102 + 996) = 75 (1098) = 82350 \quad (0.125) \quad (0.125)$$

۲. معادله درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه های آن دو برابر دیگری باشد. (۱ نمره)

$$\alpha = 2\beta \quad (0.125) \quad S = \alpha + \beta = 3\beta \quad \text{و} \quad P = \alpha\beta = 2\beta^2 \quad (0.125)$$

$$x^2 - 3\beta x + 2\beta^2 = 0 \quad \text{مثلاً} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (0.125)$$

۳. در شکل زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضابطه آن را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)

$$y = a(x-2)^2 \quad (0.125)$$

$$-1 = a(4-2)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \quad (0.125)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4} + x - 1 \quad (0.125) \quad (0.125)$$

۴. معادلات زیر را حل کنید. (هر مورد ۱ نمره)

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x^2+2x+5}$$

$$x^2 + 2x + 4 = t \quad (0.125)$$

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \Rightarrow t^2 + t = t^2 - 1 - t^2 + t \Rightarrow t^2 = -1 \quad \text{غیرممکن} \quad (0.125) \quad (0.125)$$

معادله جواب ندارد. (0.125)

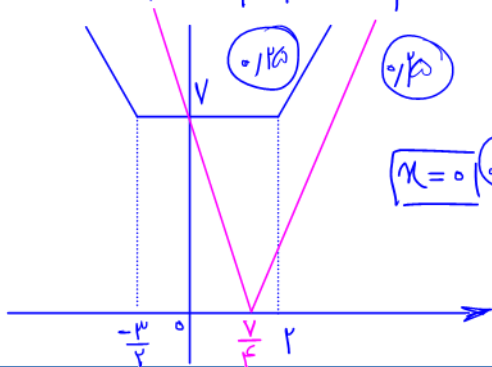
$$\text{ب) } \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \Rightarrow (1+\sqrt{x})(1-x) = (1-\sqrt{x}) \quad (۰/۱۵)$$

$$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow (1-\sqrt{x})(1+2\sqrt{x}+x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{x})\sqrt{x}(1+\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1 & \text{ق} \\ \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0 & \text{ق} \\ 1+\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=-1 & \text{غ} \end{cases} \quad \begin{matrix} (۰/۱۵) \\ (۰/۱۵) \end{matrix}$$

$$\text{د) } |2x+3| + |-2x+4| - |4x-7| = 0$$

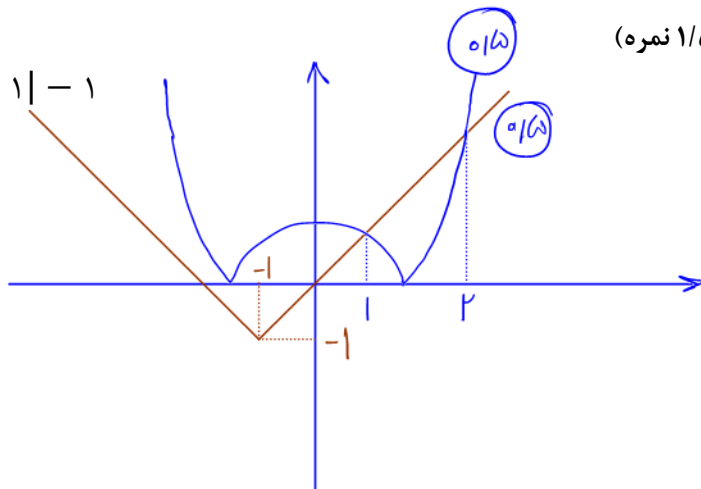
$$|2x+3| + |2x-4| = |4x-7| \quad \text{روش اول:}$$



$$\begin{cases} x \geq 2 & 4x-1 = 4x-7 \Rightarrow -1 \neq -7 \\ \frac{7}{4} \leq x < 2 & 2x+3 - 2x+4 = 4x-7 \Rightarrow 4x=14 \\ & x=\frac{7}{2} \text{ غ} \\ -\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{4} & 2x+3 - 2x+4 = -4x+7 \Rightarrow x=0 \text{ ق} \\ x \leq -\frac{3}{2} & -2x-3 - 2x+4 = -4x+7 \Rightarrow 1 \neq 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} (۰/۱۵) \\ (۰/۱۵) \\ (۰/۱۵) \\ (۰/۱۵) \end{matrix}$$

۵. نامعادله زیر را به روش هندسی حل کنید. (۱/۵ نمره)

$$|x^2 - 2| < |x+1| - 1$$



$$(1, 2) \quad (۰/۱۵)$$

۶. الف) $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را بدست آورید. (۱ نمره)

$$M_{\perp O} = (5, -1) \quad \text{مرکز} \quad (۰/۱۵)$$

$$r = OA = \sqrt{(8-0)^2 + (-8-6)^2} = \sqrt{14+14} = \sqrt{28} \quad \text{شعاع} \quad (۰/۱۵)$$

ب) فاصله بین خط $x + 2y = 5$ و نقطه $A(4, 3)$ را بدست آورید. (۱ نمره)

$$x+2y-5=0$$

$$\frac{|4+6-5|}{\sqrt{1+2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \sqrt{5} \quad (۰/۱۵)$$

۷. دو تابع $f(x) = \frac{b}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x-a}{x^2+cx+d}$ با هم مساویند. مقادیر a, b, c و d را بیابید. (۱ نمره)

$$D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$\Rightarrow x^2 + cx + d = (x+3)^2 \Rightarrow x^2 + cx + d = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow c=6, d=9 \quad (۰/۱۵)$$

$$\frac{x-a}{(x+3)^2} = \frac{b}{(x+3)} \Rightarrow a=-3 \Rightarrow \frac{x+3}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow b=1 \quad (۰/۱۵)$$

۸. کدام یک از معادلات زیر y را به صورتی تابعی از x مشخص می‌کند. (۱/۵ نمره)

$$\text{الف)} (x-3)^2 + (y^2-4)^2 = 0$$

$$x=3, y=\pm 2 \quad \text{تابع نیست} \quad (۰/۱۵)$$

$$\text{ب)} y + \sqrt{y} = x^2 - 2 \quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - 2 = x_2^2 - 2 \quad (۰/۱۵)$$

$$\Rightarrow y_1 + \sqrt{y_1} = y_2 + \sqrt{y_2} \Rightarrow y_1 - y_2 + \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = 0 \Rightarrow \quad (۰/۱۵)$$

$$(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}) + (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}) = 0 \Rightarrow (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + 1) = 0 \Rightarrow \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = 0$$

همواره مخالف صفر

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \quad \text{تابع است.} \quad (۰/۱۵)$$

۹. دامنه تابع زیر را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$y = \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}$$

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{p} \mid \frac{0}{-} + \frac{2}{+} - \quad [0, 2] \quad (۰/۱۵)$$

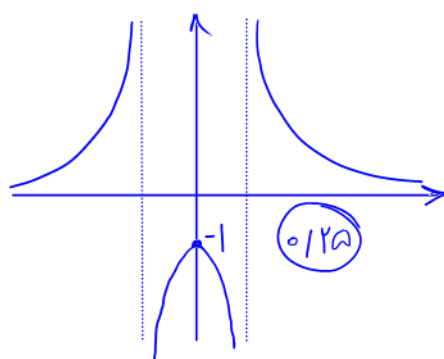
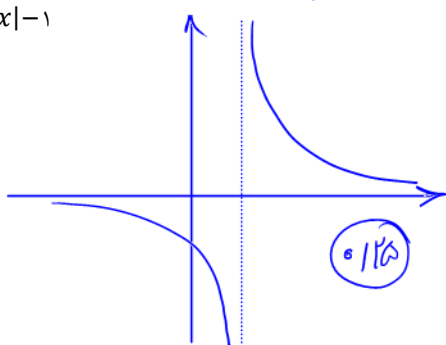
$$x \geq 0 \cap x \leq 1 \Rightarrow [0, 1] \quad (۰/۱۵)$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 1-x \Rightarrow x \neq \frac{1}{3} \quad (۰/۱۵)$$

۱۰. نمودار توابع زیر را رسم نمایید و دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید. (هر مورد ۱ نمره)

$$\text{الف)} y = \frac{1}{|x|-1}$$

$$y = \frac{1}{x-1}$$



$$D = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (۰/۱۵)$$

$$R = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty) \quad (۰/۱۵)$$

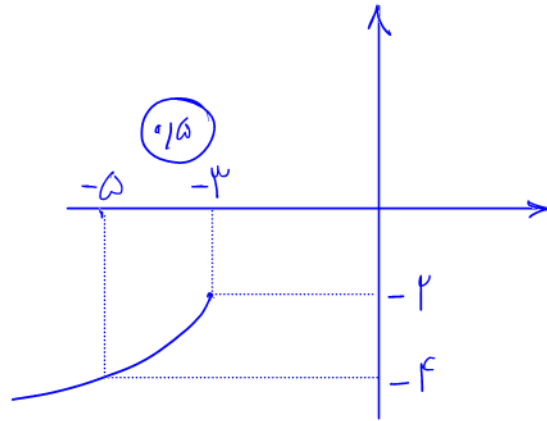
$$b) f(x) = -\sqrt{-2x-6} - 2$$

$$-2x-6 \geq 0$$

$$2x \leq -6$$

$$x \leq -3$$

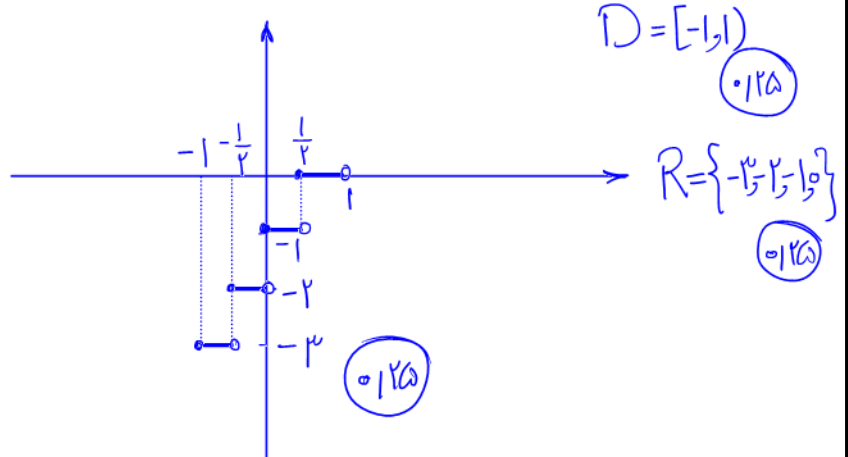
x	-3	-5
y	-2	-4



$$D = (-\infty, -3] \quad R = (-\infty, -2]$$

$$c) f(x) = [2x] - 1 \quad ; \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\begin{cases} -1 \leq x < -\frac{1}{2} & y = -3 \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0 & y = -2 \\ 0 \leq x < \frac{1}{2} & y = -1 \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 & y = 0 \end{cases}$$



۱۱. کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟ وارون تابعی که یک به یک است، را بیابید. (۱/۵ نمره)

$$الف) y = x^3 - x$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

$$\{(1, 0), (-1, 0), (0, 0)\} \quad \text{تابع یک به یک نیست} \quad (۱/۵)$$

$$y+2 = 3(x-1)^2$$

$$\sqrt{\frac{y+2}{3}} = |x-1|$$

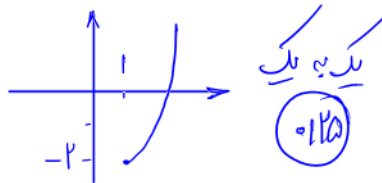
$$x = \sqrt{\frac{y+2}{3}} + 1$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y+2}{3}} + 1$$

$$b) y = 3x^2 - 6x + 1 \quad ; \quad (1 \leq x)$$

$$y = 3(x^2 - 2x + \frac{1}{3})$$

$$y = 3(x^2 - 2x + 1 - \frac{2}{3}) = 3(x-1)^2 - 2$$



۱۲. برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را محاسبه کنید. (۱/۵ نمره)

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{4}{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$$

$$3x \neq 4 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$$

موفق باشید.

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{x}{4 - 3x}$$